Zawody międzyklasowe dla 3 klasy gimnazjum i 1 klasy szkoły ponadgimnazjalnej
zorganizowane przy wsparciu Inspection Pédagogique Régionale i Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques w Strasburgu

M a t e m a t y k a   B e z   G r a n i c

Etap finałowy- 10 marca 2015

*Rozwiązanie każdego zadania należy przedstawić na osobnym arkuszu odpowiedzi (arkusz formatu A4).
* Wszystkie, nawet częściowe rozwiązania zadań, zostaną wzięte pod uwagę przez sprawdzających.
* Staranność wykonania będzie również punktowana.

Zadanie 1 (7 punktów) Wielokąty Antygony

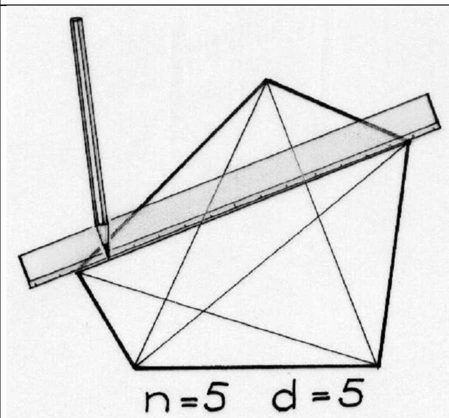
Zredaguj odpowiedź w języku francuskim, niemieckim, angielskim, hiszpańskim lub włoskim używając co najmniej 30 słów.

Nachdem Antigone ein Dreieck, ein Viereck und ein Fünfeck gezeichnet hat, stellt sie fest, dass ein Dreieck keine, ein Viereck zwei und ein Fünfeck fünf Diagonalen besitzt. Sie fragt sich, wie viele Diagonalen wohl ein Sechseck, ein Siebeneck und ein Achteck haben. Sie glaubt, eine Formel gefunden zu haben, die die Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck angibt: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$. **Wie viele Diagonalen besitzt ein Sechseck, wie viele ein Siebeneck und wie viele ein Achteck? Beweist die Formel, die Antigone gefunden hat. Kann ein Vieleck 100 Diagonal**

Después de dibujar las figuras, Antígono se da cuenta que los triángulos no tienen diagonales, que los cuadriláteros tienen dos y que los pentágonos tienen cinco. Busca cuántas diagonales tienen los polígonos de 6, 7 y 8 vértices. Antígono piensa que ha encontrado la fórmula que expresa el número de diagonales de un poligono de n vértices: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$. **¿Cuántas diagonales tienen los polígonos de 6, 7 y 8 lados? Demuestra la fórmula que ha encontrado Antígono. ¿Puede tener un polígono 100**

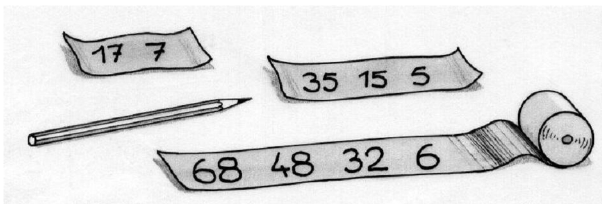
After she had drawn a few diagrams, Antigone noticed that a triangle has no diagonals, that a quadrilateral has two and that that a pentagon has five. She tries to work out how many diagonals the polygons with 6, 7 and 8 vertices would have. She thinks she has found the formula that gives the number of diagonals for a polygon with *n* vertices: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$. ***How many diagonals does a polygon with 6, 7 or 8 vertices have? Show that Antigone's formula is correct. Can a polygon have 100 diagonals? Explain your answer.***

Dopo aver tracciato le figure, Antigone nota che un triangolo non ha alcuna diagonale, un quadrilatero ne ha due e un pentagono ne ha cinque. Antigone ricerca quante diagonali possano avere i poligoni rispettivamente con 6, 7 e 8 vertici. Pensa di avere individuato la formula che indica quante diagonali ha un poligono di *n* vertici: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ **Quante diagonali hanno i poligoni di 6, 7 e 8 vertici? Dimostrate la formula individuata da Antigone. E' possibile che un poligono abbia 100 diagonali? Spiegate.**



Après avoir fait les figures, Antigone remarque qu'un triangle n'a pas de diagonale, qu'un quadrilatère en a deux et qu'un pentagone en a cinq. Elle cherche combien de diagonales ont les polygones de 6, 7 et 8 sommets. Elle pense avoir trouvé une formule donnant le nombre de diagonales d'un polygone à n sommets: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$. ***Combien de diagonales ont les polygones de 6, 7 et 8 sommets? Démontrer la formule trouvée par Antigone. Est-il possible qu'un polygone ait 100 diagonales? Expliquer.***

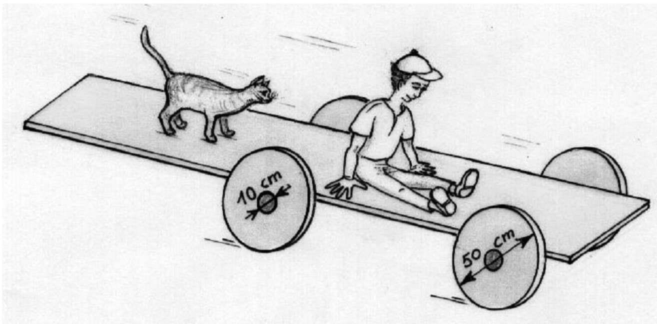
Zadanie 2 (5 punktów) Zaprogramowane ubywanie



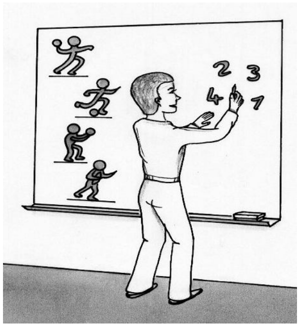
Anna bawi się ciągami liczb naturalnych. Wybiera liczbę, która staje się pierwszym elementem jej ciągu. Następny element oblicza mnożąc cyfry wybranej liczby. Postępuje w ten sposób aż do momentu, gdy pozostaje tylko liczba jednocyfrowa. Na przykład, rozpoczynając od 68, otrzymuje ciąg czterech liczb: 68, 48, 32, 6.

Jaka największa liczba naturalna mniejsza od 100 doprowadzi nas do otrzymania najdłuższego ciągu liczb?

Zadanie 3 (7 punktów) **Przejażdżka na osiach**



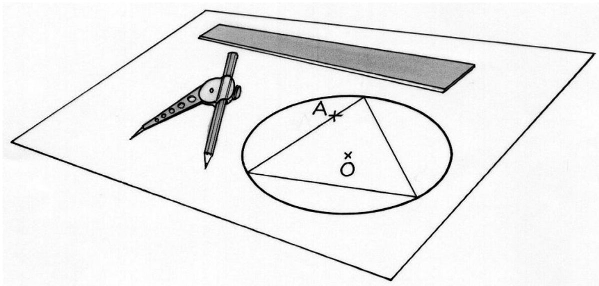
Na dwóch równoległych osiach leży długa sztywna deska. Koła kręcą się nie ślizgając się po ziemi, a deska przemieszcza się do przodu nie ślizgając się na osiach. Średnica osi wynosi 10 cm, a średnica kół umieszczonych na osiach - 50 cm.
Na jaką odległość przemieszcza się deska podczas jednego okrążenia kół? Uzasadnij swoją odpowiedź.



Zadanie 4 (5 punktów) **Czwórbój**

Szkoła Coubertina organizuje turniej sportowy. W programie przewidziane są cztery dyscypliny: siatkówka, piłka nożna, piłka ręczna i rugby. Regulamin określa, że:
- każda drużyna musi uczestniczyć w czterech spotkaniach, po jednym w każdej dyscyplinie; - jedna drużyna nie może grać dwa razy z tą samą drużyną.
Udowodnij, że turniej może się odbyć, jeśli stawi się na nim osiem drużyn.

Zadanie 5 (7 punktów) **Okrążony**

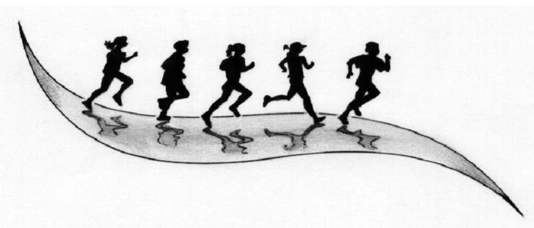


Narysuj okrąg o promieniu 6 cm. Umieść punkt A w odległości 5 cm od środka. Skonstruuj trojkąt równoboczny wpisany w okrąg, którego jeden bok przechodzi przez punkt A. Przedstaw etapy konstrukcji.
Jeśli punkt A znajduje się za blisko środka, konstrukcja jest niemożliwa do wykonania.
Określ i zamaluj zbiór punktów, dla których konstrukcja trójkąta równobocznego jest możliwa.

Zadanie 6 (5 punktów) **Klub pięciu**

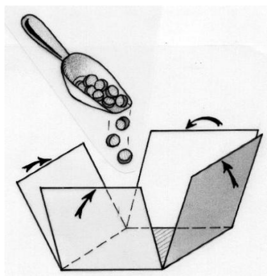
Ahmed, Benedykt, Cyryl, Damian i Eliza biorą udział w biegu zespołowym. Przybiegają na metę w podanej kolejności w pięciominutowych odstępach. Ahmed biegnie dwa razy szybciej niż Eliza.

Oblicz całkowity czas uzyskany przez pięciu sportowców.



Zadanie 7 (7 punktów) **Smart Box**

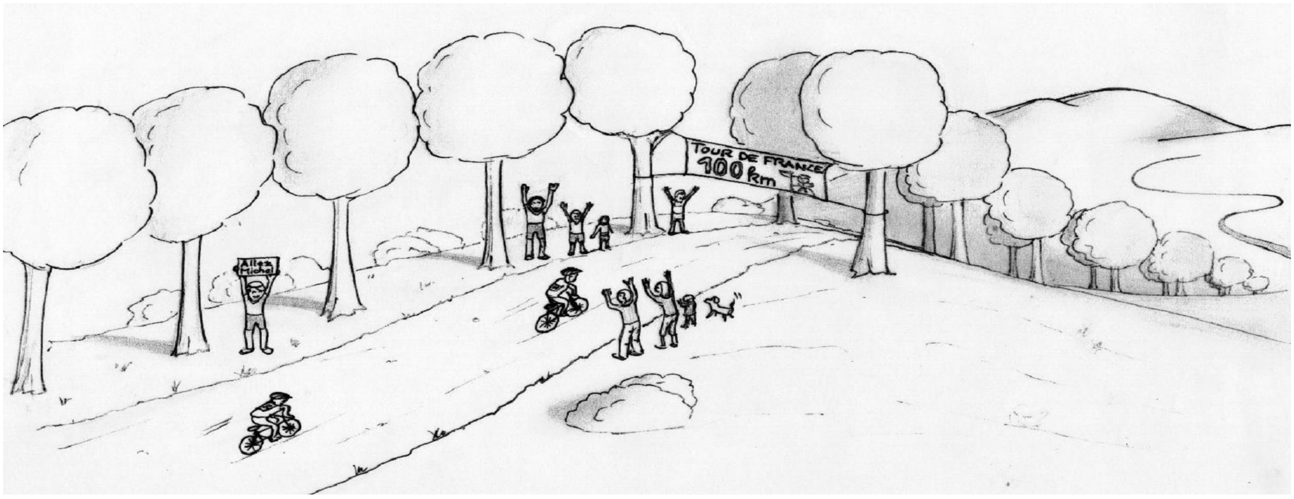
Na kartonowym kole o promieniu 10 cm konstruuję największą możliwą siatkę złożoną z pięciu identycznych kwadratów.
Z siatki składam sześcienne pudełko bez pokrywki.



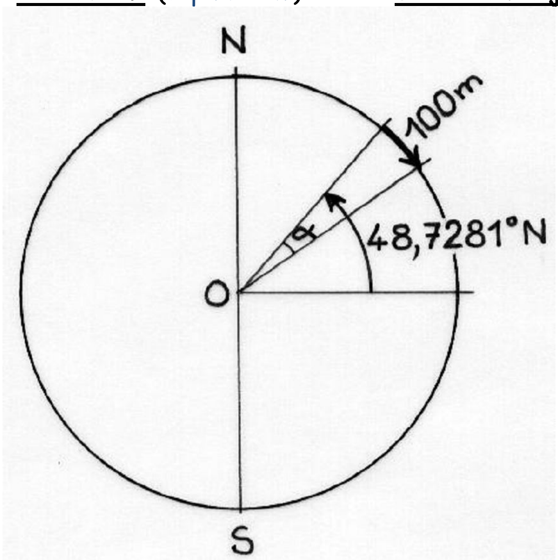
Oblicz objętość pudełka.

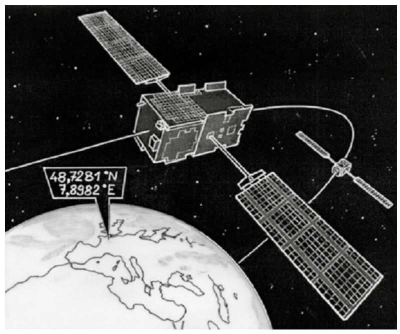
Zadanie 8 (5 punktów) **Szczęśliwe wyprzedzenie**

Podczas wjazdu pod górę dwaj rowerzyści wyprzedzają pozostałych. Obaj jadą z taką samą prędkością 18 km/h. Dzieli ich 200 m. Przekraczają szczyt wzniesienia i rozpoczynają zjazd w dół. Po przekroczeniu szczytu obaj potrzebują tyle samo czasu i takiej samej drogi, by w końcu osiągnąć stałą prędkość zjazdu 70 km/h. **Jaka jest teraz odległość między dwoma sportowcami? Uzasadnij.**



Zadanie 9 (7 punktów) **Geolokalizacja**



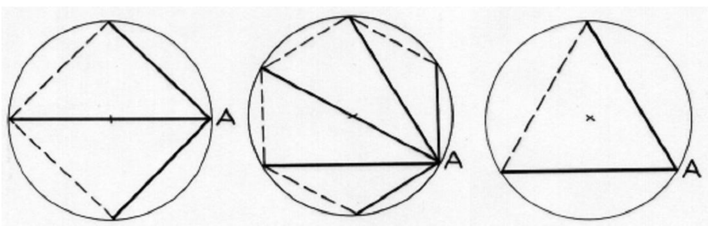


Aby określić umiejscowienie punktu znajdującego się na powierzchni Ziemi, GPS oblicza jego położenie (szerokość i długość geograficzną) korzystając z systemu satelitów.
Znajduję się w punkcie o współrzędnych 48,7281° szerokości geograficznej północnej i 7,8982° długości geograficznej wschodniej. Przemieszczam się o 100 metrów na południe. Długość geograficzna pozostała bez zmian. Zakładamy, że powierzchnia Ziemi jest zbliżona do kuli o promieniu 6367 km.

Jaką szerokość geograficzną wskazuje teraz GPS? Uzasadnij.

Zadanie 10 (10 punktów) **Teoria cięciw**

Na przedstawionych figurach wielokąty foremne wpisane są w okręgi o promieniach 1.



Oblicz dokładną wartość iloczynu długości odcinków wychodzących z A dla przedstawionych wielokątów.
Na podstawie tych przykładów, zaproponuj hipotezę dotyczącą takich iloczynów.
Jaka byłaby wartość stosownego iloczynu dla tysiąckąta foremnego?

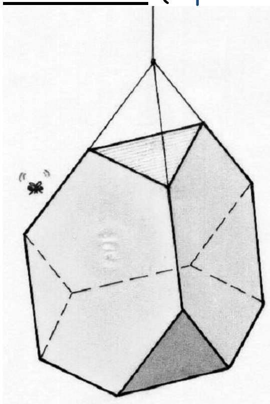
Zadania specjalne dla pierwszej klasy szkoły ponadgimnazjalnej

Zadanie 11 (5 punktów) Zagnieżdżone bańki

Dmuchając w słomkę zanurzoną uprzednio w wodzie z mydlinami, Estella umieszcza na gładkiej poziomej powierzchni bańkę w kształcie półsfery, o średnicy 12 cm. Do wnętrza pierwszej wdmuchuje drugą półkulistą bańkę. Pierwsza się powiększa. Jej nowa objętość jest równa sumie jej pierwotnej objętości i objętości bańki wewnętrznej.

Ile musiałaby wynosić średnica bańki wewnętrznej, żeby średnica zewnętrznej bańki wynosiła 14 cm? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 12 (7 punktów) Pole do popisu



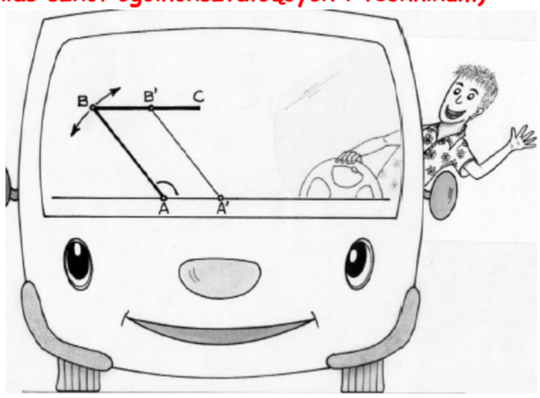
Na kółku matematycznym uczniowie skonstruowali z kartonu czworościan ścięty. Składa się on z:

• 4 ścian będących sześciokątami foremnymi;
• 4 ścian będących trójkątami równobocznymi.

Czworościan wisi w sali lekcyjnej. Przypadkowo na jednym z punktów powierzchni tego wielościanu siada mucha. Wykluczamy sytuację, w której mucha siada na jednej z krawędzi.

Oblicz prawdopodobieństwo, z jakim mucha usiądzie na ścianie sześciokątnej.

Zadanie 13 (10 punktów) Wszystko wytrze? (wyłącznie dla 1. klas szkół ogólnokształcących i technikum)

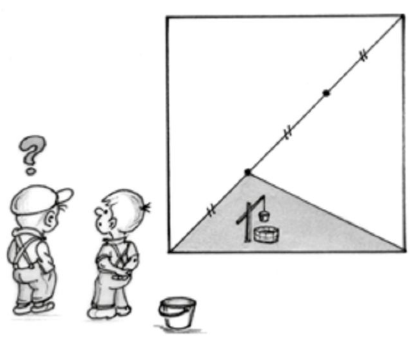


Eryk proponuje konstruktorowi pojazdów wypróbowanie prototypu wycieraczki przedniej szyby. Szczotka BC wycieraczki jest przymocowana na boku BB' równoległoboku ABB'A'. Odcinek AA' jest stały. AB=BC=70 cm. Kąt A'AB przegubowego równoległoboku ABB'A' zmienia się od 0° do 180°.

Narysuj i pokoloruj powierzchnię wycieraną przez szczotkę BC w skali 1:10. Oblicz tę powierzchnię.

Czy konstruktor przyjmie propozycję Eryka? Uzasadnij.

Zadanie 13 (10 punktów Manon u źródła (wyłącznie dla 1. klas zawodowych)



Manon i jej bracia chcą sprawiedliwie podzielić kwadratowy teren o boku 120 m; każdy ma otrzymać trójkątną parcelę o jednakowej powierzchni. Manon dokonuje wyboru jako pierwsza: wybiera parcelę zaznaczoną na szaro na planie obok. Na terenie Manon jest studnia, dlatego każdy z braci chce otrzymać teren, który sąsiaduje z terenem siostry bokiem lub wierzchołkiem.

Znajdź liczbę braci Manon i zaproponuj podział terenu.