

# Matematyka bez granic



éducation  
nationale  
enseignement  
supérieur  
recherche



9 marca 2006

- ✓ Każde zadanie należy rozwiązywać na osobnej kartce.
- ✓ Wszystkie zadania poza zadaniami 2, 4, 6, 7 i 8 powinny mieć komentarze i uzasadnienia.
- ✓ Każde rozpoczęte zadanie również będzie oceniane.
- ✓ Przy ocenie uwzględnia się estetykę pracy.

## Zadanie 1 7 punktów

### Pom-Pom girls

Rozwiązanie zadania powinno być zredagowane w języku angielskim, niemieckim, francuskim lub włoskim w minimum 30 słowach.

*Ritagliate la figura allegata secondo i tratti punteggiati; poi, scambiate le parti A e B. Incollate, quindi, sul foglio risposta, la nuova rappresentazione del gruppo.*

Con questa manipolazione si potrebbe pretendere di provare che  $13 = 12$ , ma, naturalmente, in questa "dimostrazione" c'è un errore.

*Individuate l'errore ed illustrate con precisione in che cosa consiste l'inganno.*

*Découper la figure jointe suivant les pointillés, puis échanger les pièces notées A et B. Coller la nouvelle vue du groupe sur la feuille-réponse.*

Par cette manipulation on prétend prouver que  $13 = 12$ , mais il y a, bien sûr, un défaut dans cette "démonstration".  
*Trouver ce défaut et expliquer précisément en quoi consiste la supercherie.*

*Schneidet das beiliegende Bild entlang der gestrichelten Linie aus. Vertauscht anschließend A und B. Klebt dieses neue Gruppenbild auf das Lösungsblatt.*

Durch diese Manipulation möchte man beweisen, dass  $13 = 12$  ist. Aber natürlich steckt irgendwo ein Fehler in diesem „Beweis“.

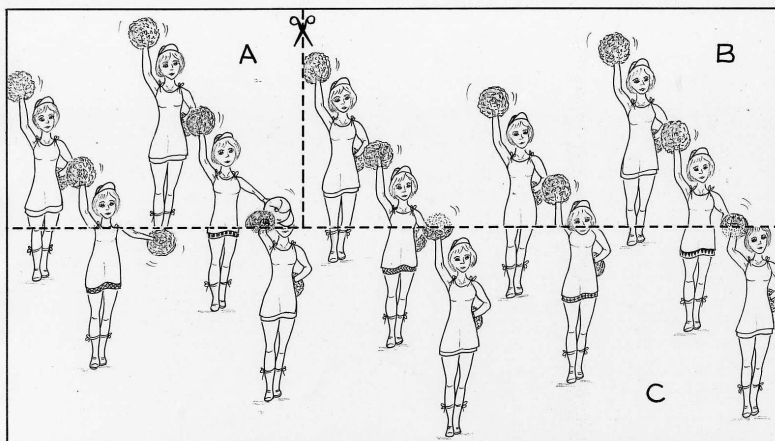
*Findet den Fehler und erklärt genau worin der Trick besteht.*

*Cut out the figure attached along the dotted lines. Then swap piece A with piece B. Stick the new view of the*

*group on your worksheet.*

This re-arrangement claims to prove that  $13 = 12$ , but of course, this "demonstration" is wrong.

*Find the fault and explain precisely what the trick is.*



## Zadanie 2 5 punktów

### Antygraniastosłup

Graniastosłup prosty jest wielościanem posiadającym dwie ściany, które są wielokątami równoległymi i przystającymi, a pozostałe ściany boczne są prostokątami.

Antygraniastosłup jest wielościanem posiadającym dwie ściany, które są wielokątami równoległymi i przystającymi, ale jego ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.

**Narysuj siatkę antygraniastoslupa takiego, że:**

- Ściany równoległe są sześciokątami foremnymi o boku 3 cm;
- Ściany boczne są trójkątami równoramiennymi, a ich ramiona mają po 4 cm.

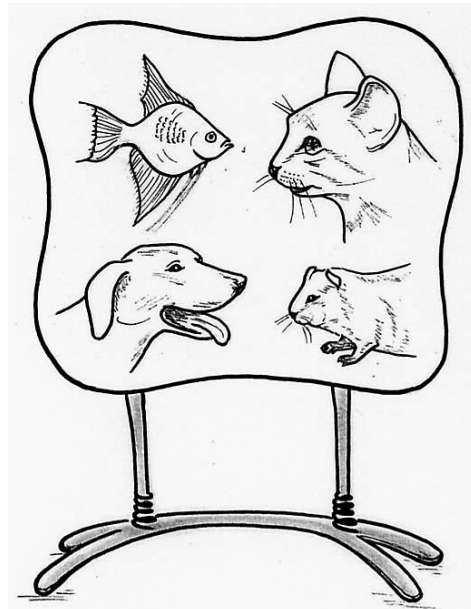
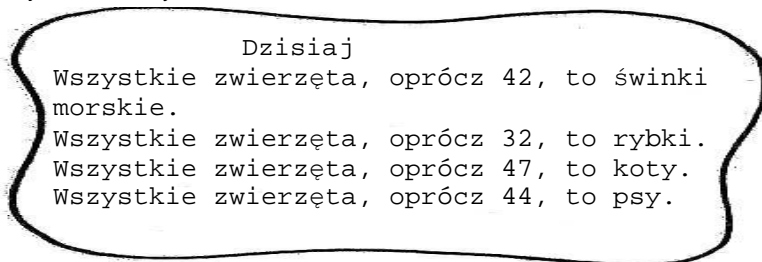
**Naklej siatkę na kartę odpowiedzi.**



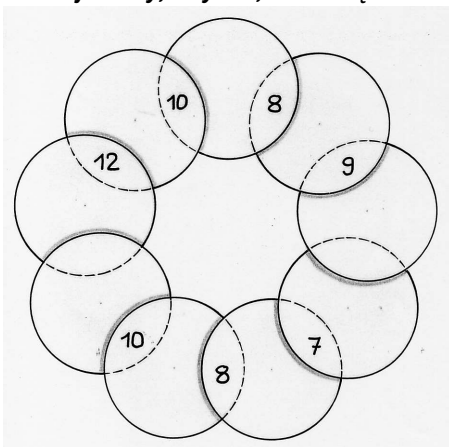
**Zadanie 3**  
**7 punktów***Na wystawie*

Pan Paweł prowadzi sklep zoologiczny i sprzedaje tam 4 gatunki zwierząt. Każdego ranka wywiesza na wystawie, ile zwierząt jakiego gatunku ma do sprzedania.

Oto jeden z afiszy :

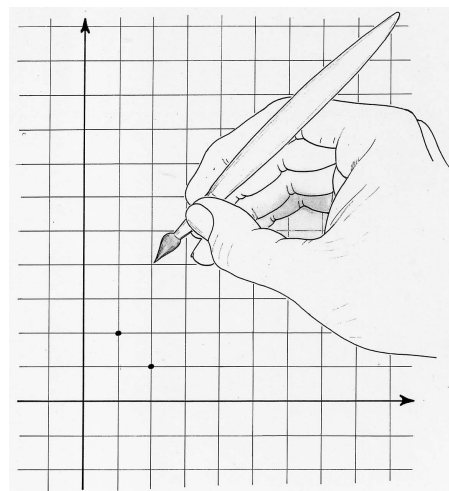


**Oblicz ile zwierząt każdego rodzaju ma pan Paweł dzisiaj do sprzedania. W taki sam sposób przedstaw afisz na jutro, jeśli wiadomo, że sprzedał dzisiaj 3 koty, 6 rybek, 1 świnkę morską i że nie sprzedał żadnego psa.**

**Zadanie 4**  
**5 punktów***Widziane z drugiej strony*

Dziewięć żetonów ponumerowano z jednej strony od 1 do 9. Na każdym z nich jest inna liczba. Z drugiej strony żetony niczym się nie różnią. Odwrócono je cyframi do spodu i ułożono w rozetę, jak na rysunku obok. Na części wspólnej niektórych nakładających się żetonów zapisano sumę ich numerów.

**Przerysuj na kartę odpowiedzi ten rysunek i na każdym żetonie wpisz numer, jaki się na nim znajduje.**

**Zadanie 5**  
**7 punktów***Niecałkowite środki*

W prostokątnym układzie współrzędnych Klaudiusz zaznacza punkty o współrzędnych całkowitych, stosując następującą zasadę:

« Każdy nowo postawiony punkt tworzy z każdym z pozostałych odcinki, których środki mają tę własność, że ich współrzędne nie powinny być dwiema liczbami całkowitymi. »

**Jaką maksymalnie ilość punktów może zaznaczyć Klaudiusz, stosując tę zasadę? Odpowiedź uzasadnić.**

**Zadanie 6**  
**5 punktów***Nagrody*

Michalina organizuje zawody w bieganiu dla uczniów swojej szkoły. W zawodach weźmie udział 50 dzieci.

Na zakończenie biegu każde dziecko otrzyma dokładnie jedną nagrodę: puchar, T-shirt lub medal.

Puchar kosztuje 23 €. T-shirt – 7 €.

Medale sprzedawane są w paczkach po 5 sztuk, jedna paczka kosztuje 4 €.

Michalina otrzymała na ten cel 150 €, które musi wykorzystać w całości. Wszystkie zakupione nagrody muszą być rozdane.

**Ile pucharów, T-shirtów i medali musi kupić Michalina ?**

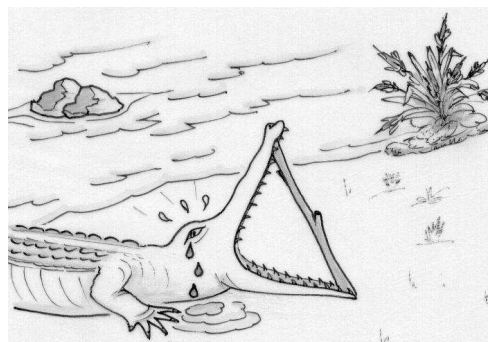


**Zadanie 7**  
**7 punktów**

# Krokodyle łzy

Oto jak narysować krokodylą łzę wpisaną w kąt  $\sphericalangle xOy$  o mierze  $100^\circ$ :  
Narysuj odcinek AB o długości 14 centymetrów, tak aby punkt A należał do półprostej  $Ox$ , a B leżał na półprostej  $Oy$ .  
Znajdujemy punkt M symetryczny do punktu O względem prostej AB.

Znajdując dostatecznie dużo jej punktów, narysuj krzywą wyznaczoną przez punkt M, jeśli końce odcinka AB przemieszczają się po ramionach kąta  $xOy$ .

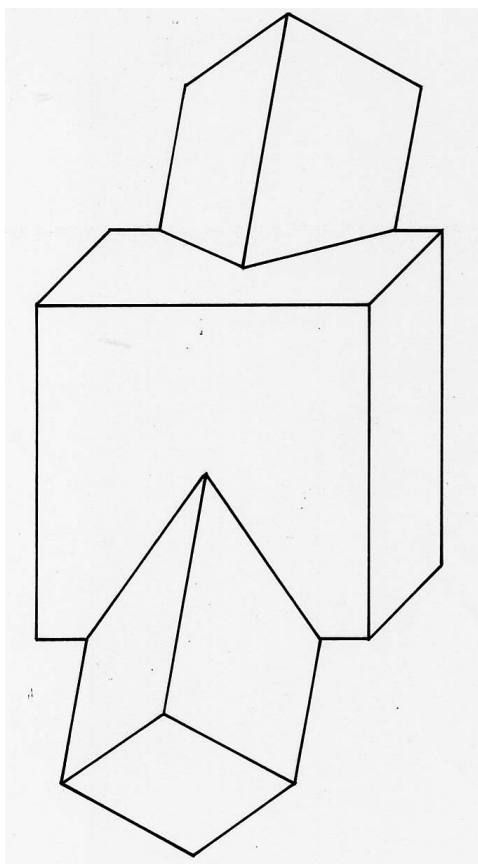


**Zadanie 8**  
**5 punktów**

# Piercing

Przedziurawiono sześcian w taki sposób, żeby można było przez niego przełożyć klocek w kształcie prostopadłościanu o podstawie kwadratowej.

Dwie krawędzie klocka przecinają krawędzie sześcianu nienależące do jednej ściany, a dwie pozostałe przechodzą przez środki ścian sześcianu. Rysunek poniżej pokazuje tę sytuację w perspektywie. Wyciągamy klocek z sześcianu.



Bez żadnych wyjaśnień ani obliczeń narysuj w tej samej perspektywie powstałą figurę („dziurawy sześcian”). Widoczne krawędzie narysuj linią ciągłą, a ukryte - linią przerywaną.

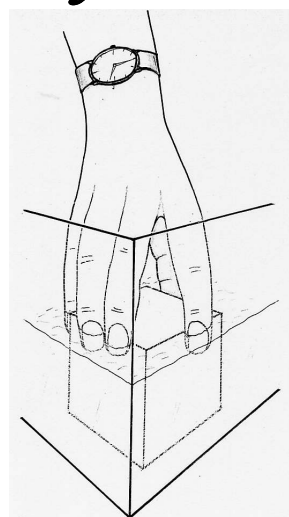
**Zadanie 9**  
**7 punktów**

# Zatopiony

Akwarium o podstawie w kształcie prostokąta napełnione jest wodą. Wewnętrzne wymiary podstawy akwarium, mierzone w centymetrach, są liczbami całkowitymi. Żaneta wkłada do akwarium sześcian o krawędzi 10 cm. Poziom wody jest wtedy taki sam jak wysokość sześcianu.

Następnie Żaneta w miejsce tego sześcianu wkłada inny o krawędzi 20 cm. I znów poziom wody w akwarium równy jest wysokości nowego sześcianu.

Jakie są wymiary podstawy akwarium i ile litrów wody ono zawiera? Odpowiedź uzasadnij.

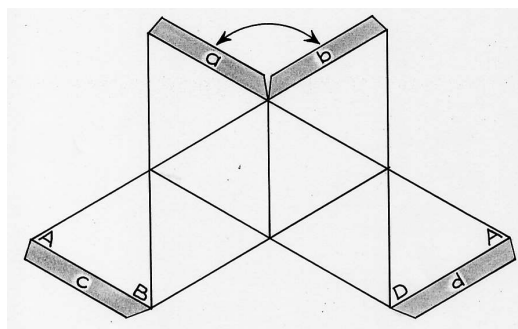


**Zadanie 10**  
**10 punktów**

# Na chybciaka

Oto oryginalna metoda pozwalająca zbudować bryłę: Narysuj poniższą siatkę w jej wymiarach rzeczywistych. Składa się ona z 8 trójkątów równobocznych o krawędzi 5 cm oraz z 4 zakładki (potrzebnych do sklejenia) oznaczonych literami a, b, c i d.

Wytnij siatkę, pozaginaj wzdłuż narysowanych linii, a następnie sklej ze sobą zakładki a i b. Na karcie odpowiedzi narysuj kwadrat ABCD o boku 5 cm.



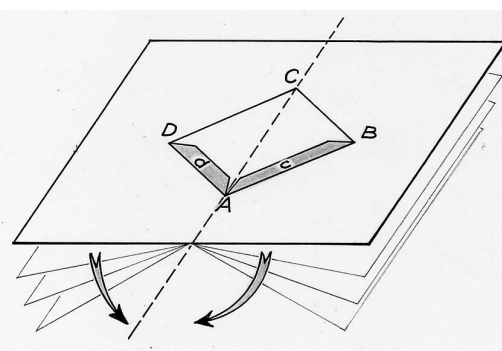
Przyłóż jedną ze zgiętych krawędzi siatki do przekątnej kwadratu AC.

Przyklej zakładki c i d siatki, do karty odpowiedzi w taki sposób, aby krawędzie AB i AD siatki pokryły się z bokami kwadratu AB i AD.

Zegnij i złóż kartkę wzdłuż linii AC tak, aby siatka pozostała na zewnątrz.

Po zgięciu kartki bardzo szybko z siatki powstaje bryła. Aby schować bryłę należy złożyć kartkę w drugą stronę.

Wykorzystując tę metodę, zbuduj bryłę, a następnie przedstaw sposób obliczania jej objętości. Wynik podaj z dokładnością do  $\text{cm}^3$ .



## Zadanie 11 5 punktów

## Zapomniałaś hasła ?



Marion siedzi w domu. Jest dzisiaj zaproszona na wieczór do nowej koleżanki, która wysłała jej swój adres na pocztę elektroniczną, ale Marion zapomniała hasła dostępu do swojego konta.

Pamięta jedynie, że chodzi o pewną szczególną liczbę zawartą w przedziale od 1 000 do 2 miliardów i która jest równocześnie kwadratem liczby całkowitej, sześcianem innej liczby całkowitej oraz piątą potęgą jeszcze innej liczby całkowitej.

Marion denerwuje się, próbuje wprowadzać setki liczb, lecz bez powodzenia. W końcu prosi o pomoc swoją koleżankę Zosię, która pasjonuje się matematyką. Zosia po wysłuchaniu całej historii, zastanowiła się chwilę i mówi: « Jest tylko jedna liczba, która spełnia wszystkie warunki! To jest ... ».

**Jakiej liczby szukała Marion ? Uzasadnij.**

## Zadanie 12 7 punktów

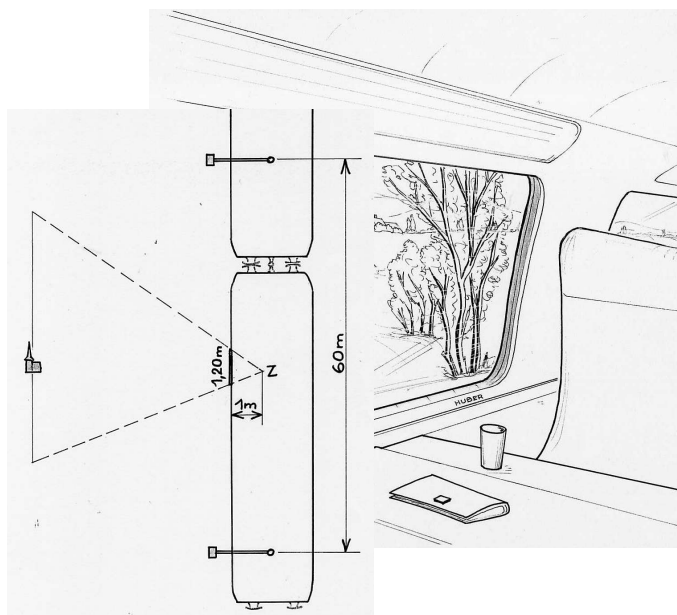
## Matematyczny Express

Siedząc w pociągu, Zosia spogląda przez okno. Co 2 sekundy przed jej oczami przesuwa się słup elektryczny. Po prawej stronie okna ukazała się wieża kościelna, która przesuając się w lewo przez pole widzenia Zosi znikła po 72 sekundach.

« Jaka jest odległość wieży od torów kolejowych? » - zastanawia się Zosia.

**Oblicz przybliżoną wartość tej odległości wiedząc, że :**

- W momencie zdarzenia pociąg jechał po linii prostej.
- Odległość między dwoma słupami elektrycznymi wynosi 60 m.
- Zosia siedzi w odległości 1m od okna, które ma szerokość 1,20 m.



## Zadanie 13 10 punktów

## Z Budapesztu

Fasada Parlamentu w Budapeszcie jest ozdobiona rozetą. Oto sposób wykonania jej szkicu :

- Narysować 3 okręgi o promieniu 3 cm parami styczne.
- Narysować duży okrąg styczny do trzech pozostałych, który ma po jednym punkcie styczności z każdym z nich.
- Wymazać trzy małe łuki znajdujące się w środku rozety, ograniczone przez punkty styczności trzech małych okręgów.

**Na karcie odpowiedzi narysować rozetę i obliczyć promień dużego okręgu.**

