

Matematyka Bez Granic

Etap finałowy konkursu - 10 luty 2009



- * Rozwiązanie każdego zadania należy przedstawić na osobnej karcie odpowiedzi.
- * Wszystkie, nawet częściowe rozwiązania zadań, zostaną wzięte pod uwagę przez sprawdzających.
- * Estetyka zaprezentowania rozwiązań będzie również punktowana.
- * W rozwiązaniach zadań 1, 9, 10, 12 i 13 należy przedstawić tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.

Mathématiques
sans Frontières
en Pologne

Zadanie 1 (7 punktów) *Rytm kruczaty*

Zredaguj odpowiedź w języku niemieckim, angielskim, francuskim lub włoskim używając co najmniej 30 słów.

Peter muss in seinen Ferien ein Buch lesen. Er rechnet sich aus, dass er 30 Seiten pro Tag lesen muss um es zu schaffen.

In den ersten Ferientagen hält er sich nicht an diesen Rhythmus. Er liest nur 15 Seiten pro Tag. Peter sagt sich, dass er diesen Rhythmus bis zur Hälfte des Buches beibehalten kann, wenn er bei der zweiten Hälfte 45 Seiten pro Tag liest.

Was haltet ihr von seiner Argumentation? Begründet.

Peter has to read a book during his holidays. He calculates that he must read 30 pages a day to succeed. The first days of holidays, he doesn't keep to this speed: he reads 15 pages a day. Anyway Peter thinks that he can keep this speed until halfway through the book, if he reads the second half at 45 pages every day.

What do you think of the way he reasons? Explain.



Pierre doit lire un livre pendant ses vacances. Il calcule qu'il doit lire 30 pages par jour pour y parvenir.

Les premiers jours des vacances, il ne respecte pas ce rythme; il lit 15 pages par jour. Pierre se dit alors qu'il peut garder ce rythme jusqu'à la moitié du livre s'il lit la deuxième moitié à raison de 45 pages par jour.

Que penser de son raisonnement? Expliquer.

Piero deve leggere un libro durante le vacanze. Per riuscirci calcola di dover leggere 30 pagine al giorno. Durante i primi giorni di vacanza non rispetta, però, questo ritmo; legge, infatti, solo 15 pagine al giorno.

A questo punto, Piero considera di poter proseguire così fino alla metà del libro a patto di proseguire la lettura della seconda metà in ragione di 45 pagine al giorno.

Che pensare di questo ragionamento? Spiegare.

Zadanie 2 (5 punktów)

Kot w butach przyspiesza

Kot w Butach miał stare i zużyte siedmiomilowe buty, więc postanowił sprawić sobie nową, jeszcze bardziej magiczną parę. W nowych butach może robić zwykłe kroki i wielkie kroki. Zwykły krok mierzy 7 mil. Wielki krok wydłuża siedmiokrotnie już przebyty dystans. Jeśli Kot znajduje się na przykład 35 mil od punktu wyjścia, wielki krok pozwala mu na przemieszczenie się na odległość 245 mil od startu.

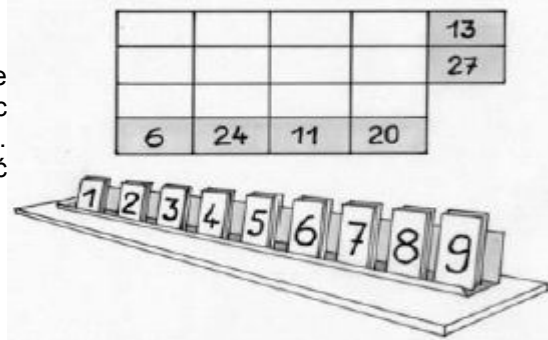
Pewnego dnia, Kot w butach postanawia przejść ze Strasburga do Kazania, w Rosji.



W jaki sposób będzie musiał stawiać kroki, aby jak najszybciej przebyć dokładnie 700 mil?

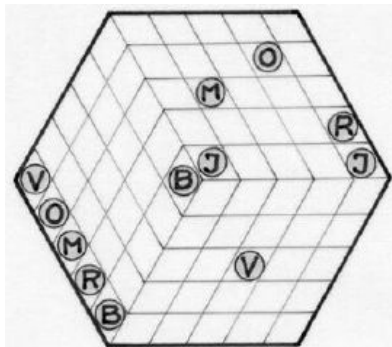
Zadanie 3 (7 punktów) *Tabelkowe sumy*

Należy uzupełnić tabelę tak, aby sumując elementy w poziomie otrzymać wyniki zapisane w kolumnie po prawej stronie, a sumując elementy w pionie otrzymać wyniki zapisane w ostatniej linii tabeli. Można używać tylko liczb całkowitych od 1 do 9. Mogą one wystąpić tylko jeden raz w poziomie i w pionie.



Przedstaw wszystkie możliwości uzupełnienia tabeli.

Zadanie 4 (5 punktów) *Skojrzenia*

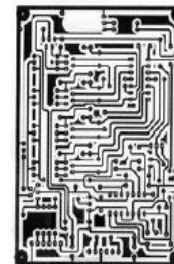


Producent części elektronicznych wytwarza obwody drukowane na płytkach z tworzywa sztucznego.

Właśnie otrzymał zamówienie na nowy model obwodu w kształcie sześciokąta.

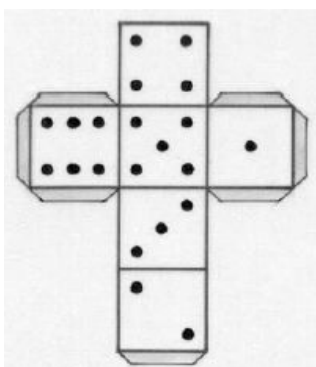
Końce jednego obwodu, zaznaczone tą samą literą, muszą być połączone jedną linią w podanym obok układzie.

Sześć linii musi być dokładnie rozdzielonych: dwie nigdy nie mogą przebiegać przez to samo pole, a jedna będzie zawsze przebiegała z jednego do drugiego, sąsiadującego pola, przechodząc przez ich wspólny bok.



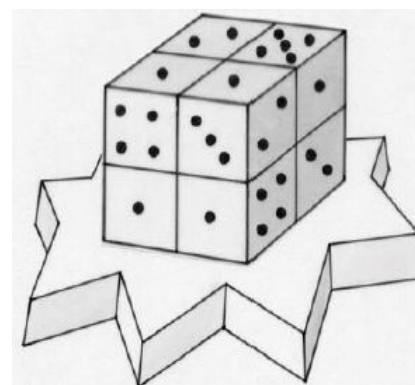
Na karcie odpowiedzi przedstaw przebieg 6 ścieżek na modelu obwodu w kształcie sześciokąta o boku 5 cm. Zaznacz każdą z nich innym kolorem.

Zadanie 5 (7 punktów) *Rzut oczkiem*



Na rysunku z prawej strony przedstawiono duży sześciian, zbudowany z ośmiu identycznych kostek. Na rysunku z lewej strony przedstawiono siatkę jednej z tych kostek. Tylko dolna ściana dużego sześcianu nie zawiera w sumie 9 oczek. Na każdej z pozostałych pięciu ścian suma oczek wynosi 9.

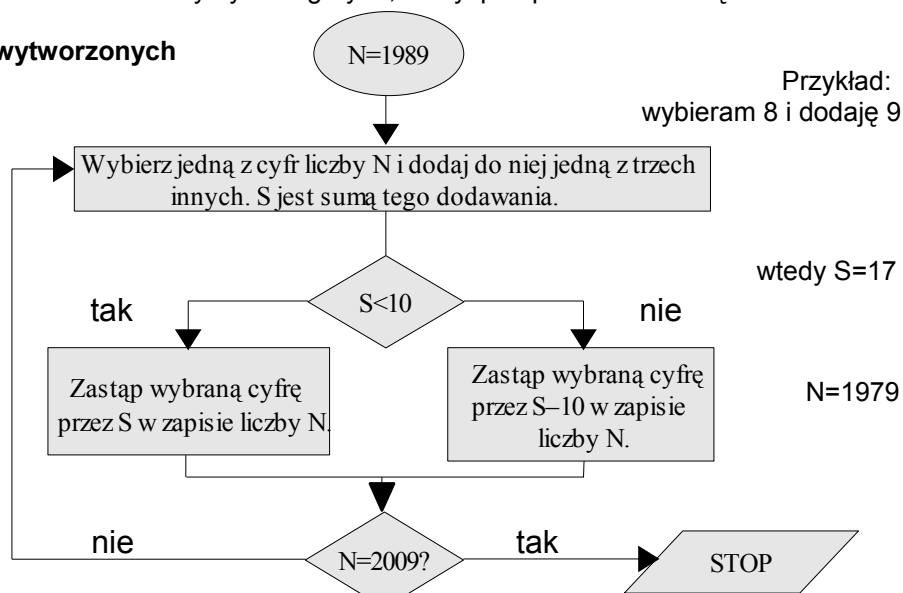
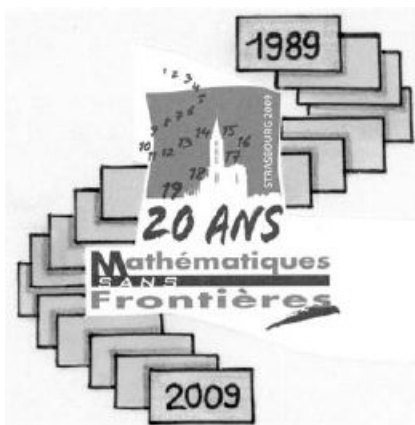
Ile oczek znajduje się na dolnej ścianie sześcianu? Narysuj na karcie odpowiedzi możliwe układy oczek.



Zadanie 6 (5 punktów) *To już 20 lat*

Na dwudziestolecie Matematyki Bez Granic Gerard wymyślił algorytm, który przeprowadza liczbę 1989 na 2009 generując po drodze ciąg liczb.

Przedstaw najkrótszy z ciągów liczb wytworzonych przez algorytm Gerarda.

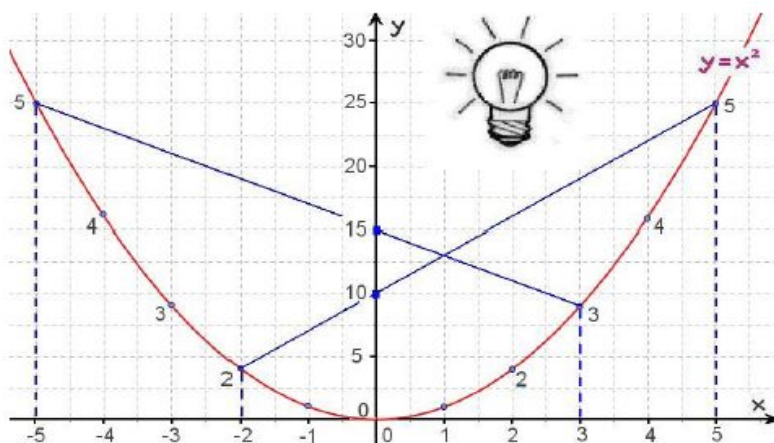


Zadanie 7 (7 punktów) *Mnożenie paraboliczne*

Rysunek obok przedstawia wykres funkcji $y = x^2$ w prostokątnym układzie współrzędnych. Dowiedzono, że wykres ten umożliwia wyznaczenie iloczynu dwóch liczb, co jest możliwe dzięki nieskomplikowanemu połączeniu odpowiednio wybranych punktów krzywej.

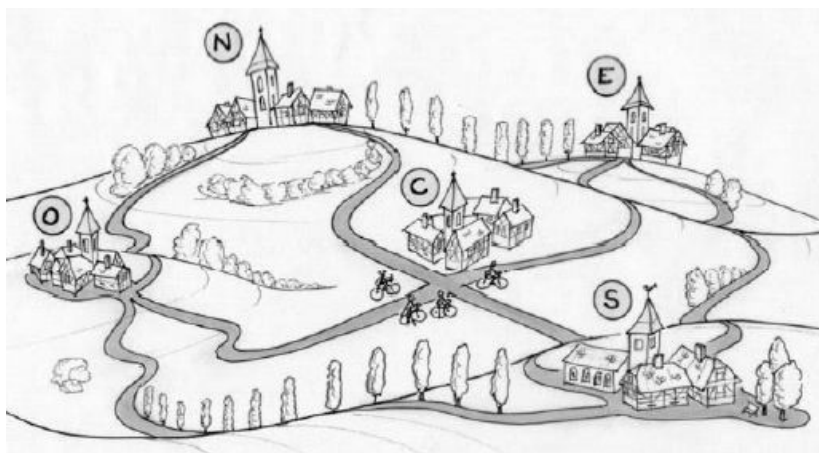
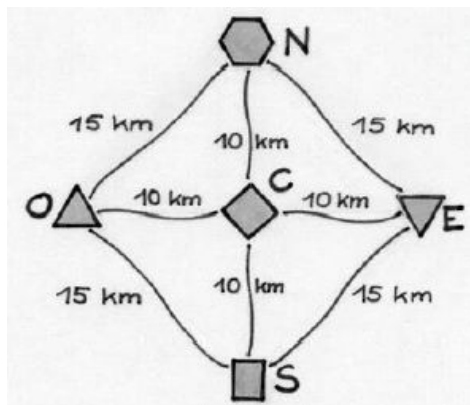
Narysuj na karcie odpowiedzi wykres krzywej $y = x^2$ dla x z zakresu od -9 do 9 w układzie współrzędnych prostokątnych w taki sposób, że 1 cm będzie odpowiadał jednej jednostce na osi odciętych i pięciu jednostkom na osi rzędnych. Użyj tego wykresu do wyznaczenia przybliżonych wartości iloczynu $4,5 \times 7,5$ oraz ilorazu $52 : 8,5$.

Nie wymazuj szkiców pomocniczych.



Zadanie 8 (5 punktów) *Jak najkrócej*

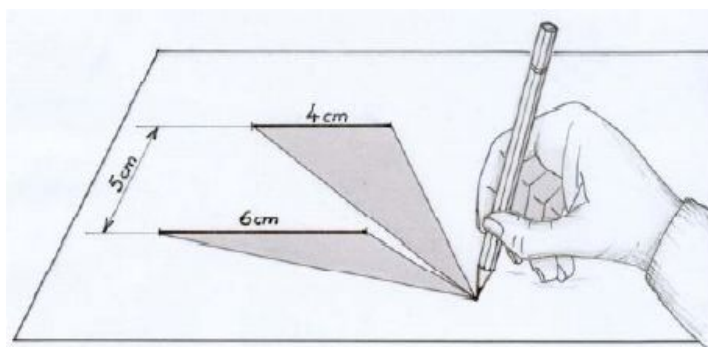
Opiekun klubu kolarskiego ze Środy (C) organizuje rajd, którego trasa ma przebiegać przez wsie Północna (N), Południowa (S), Zachodnia (O) i Wschodnia (E). Rajd rozpocznie się i zakończy w Środzie. Trasa ma przebiegać co najmniej jeden raz przez każdą z dróg zaznaczoną na podanym schemacie, dokładnie określając długości tych dróg. Trasa ta ma być możliwie najkrótsza. **Wskaż trasę rajdu spełniającą postawione warunki i oblicz jej całkowitą długość.**



Zadanie 9 (7 punktów) *Na powierzchni*

AB i CD są odcinkami dwóch prostych równoległych, odległych od siebie o 5 cm. Ich długości są następujące: $|AB| = 4$ cm, a $|CD| = 6$ cm. Szukamy zbioru takich punktów M na płaszczyźnie, że trójkąty AMB i CMD mają równe pola.

Narysuj odcinki AB i CD na karcie odpowiedzi i zaznacz zbiór szukanych punktów. Przedstaw tok rozumowania.



*Mathématiques
sans Frontières
en Pologne*

Zadanie 10 (7 punktów) *Wytnij - wklej*

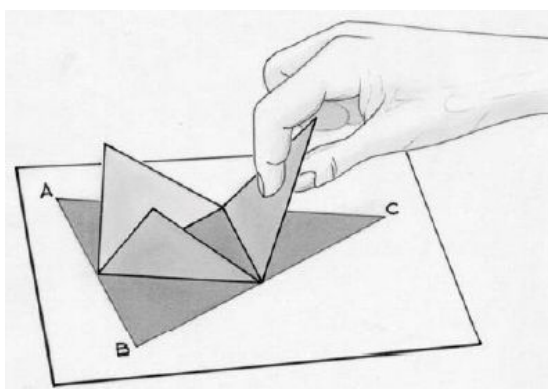
Kamila chce otrzymać czterometrowy pas papieru o szerokości 1 centymetra. Używa do tego prostokątnej kartki papieru, której wymiary w centymetrach są liczbami całkowitymi. Wycina równoległe paski o szerokości 1 centymetra i o długości równej jednemu z wymiarów kartki. Następnie łączy paski, nakładając je na siebie na 1 cm, aby je skleić.

Znajdź wymiary prostokątnej kartki papieru, którą pocięła Kamila. Przedstaw wszystkie możliwe rozwiązania, wiedząc, że kartka ta jest mniejsza od kartki formatu A4 (21 cm x 29,7 cm). Wyłumacz.



ZADANIA DODATKOWE DLA PIERWSZEJ KLASY SZKOŁY PONADGIMNAZJALNEJ

Zadanie 11 (5 punktów) *Czworościan równościenny*



Trójkąt ABC, jeśli tylko ma trzy kąty ostre, pozwala łatwo na skonstruowanie czworościanu.

Wystarczy wytyczyć proste, łączące środki boków trójkąta, następnie zagiąć trójkąty wzdłuż tych prostych tak, aby połączyć ich wierzchołki w punkcie S.

Otrzymamy czworościan zwany równościennym, ponieważ jego cztery ściany dają się na siebie nałożyć.

Interesuje nas spodek H wysokości czworościanu, wychodzącej z punktu S.

Kiedy podniesiemy ściany boczne, zauważymy, że punkt ten musi koniecznie znaleźć się wewnątrz trójkąta wyjściowego ABC.

Czym jest punkt H dla trójkąta wyjściowego ABC?

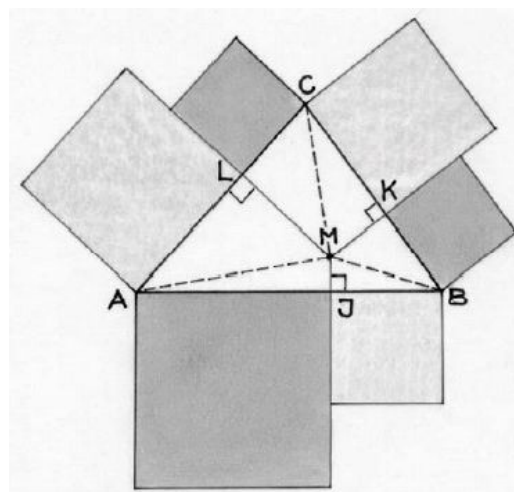
Zadanie 12 (7 punktów) *Piekło - niebo*

M jest dowolnym punktem wewnątrz trójkąta ABC o trzech kątach ostrych.

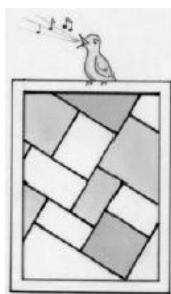
Z punktu M dzielimy trójkąt ABC na 6 trójkątów prostokątnych.

Otrzymujemy w ten sposób punkty J, K, L, dzięki którym można zbudować 6 kwadratów, tak, jak zaznaczono na przedstawionym rysunku.

Porównaj sumę powierzchni kwadratów jasnych z sumą powierzchni kwadratów ciemnych (bez mierzenia długości!). Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 13 (10 punktów) *Pusty kwadrat*



Przecinamy kwadrat na cztery takie same części wzdłuż dwóch linii prostych prostopadłych.

Części te można ułożyć tak, żeby utworzyły większy kwadrat, pozostawiając na środku pustą przestrzeń w kształcie kwadratu.

Kwadrat o boku 8 cm przetnij tak, aby pięć części dużego kwadratu miało jednakowe powierzchnie. Przyklej na karcie odpowiedzi duży kwadrat z pustym kwadratem w środku. Uzasadnij.

